## **磨尖课07 焦点三角形面积公式与内切圆性质**

### **一、焦点三角形面积公式**

【结论1】椭圆的焦点三角形面积公式：如图1，椭圆的左、右焦点分别为,，为椭圆上异于左、右顶点的任意一点，，若 ，则椭圆的焦点三角形面积.

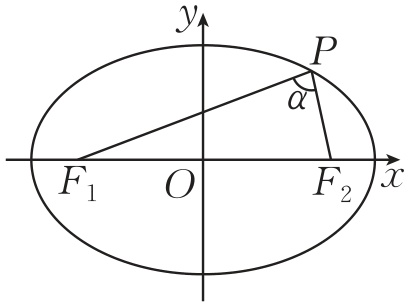


图1

特别地，当 时，有.

【结论2】双曲线的焦点三角形面积公式：如图2，双曲线的左、右焦点分别为,，为双曲线上异于左、右顶点的任意一点，，若 ，则双曲线的焦点三角形面积.

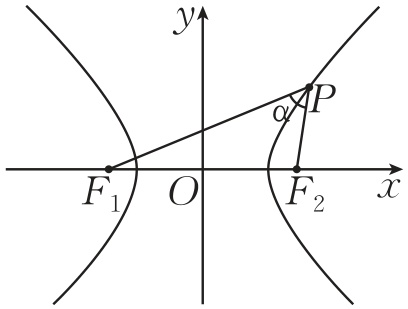


图2

特别地，当 时，有.

### **二、焦点三角形内切圆**

1.椭圆焦点三角形内切圆的重要性质

如图3，椭圆的标准方程为，,分别为椭圆的左、右焦点，为椭圆上不与左、右顶点重合的任意一点，的内切圆圆心为，且圆分别与的三边相切于点,,.设，，则有如下性质：

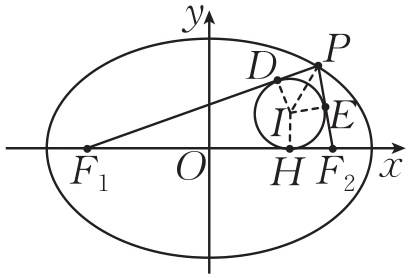


图3

【性质1】.

【性质2】，，其中为椭圆的离心率.

2.双曲线焦点三角形内切圆的重要性质

如图4，双曲线的标准方程为，,分别为双曲线的左、右焦点，为双曲线上异于实轴端点的任意一点，的内切圆圆心为，且圆分别与的三边相切于点,,.设，，则有如下性质：

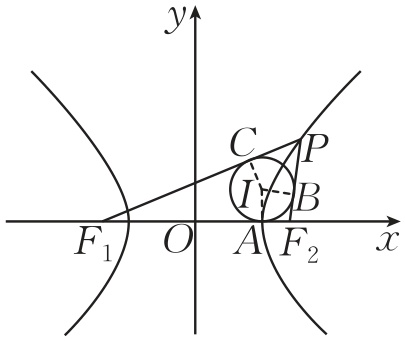


图4

【性质1】的内切圆与轴切于双曲线的顶点，且当点在双曲线左支时，切点为左顶点；当点在双曲线右支时，切点为右顶点.

【性质2】，.

### **磨尖点一 焦点三角形面积问题**

典例1（1） [2024·眉山开学考试]已知椭圆的两焦点分别为，，为椭圆上一点，且 ，则的面积为( B ).

A. 6 B. C. D.

[解析]由椭圆焦点三角形面积公式,得.故选.

（2） 已知双曲线的左、右焦点分别为,，若双曲线上存在一点使得 ，则的面积为( C ).

A. B. C. D.

[解析]由双曲线焦点三角形面积公式有.故选.



在求圆锥曲线的焦点三角形面积时，根据题意选择适合的公式，注意结合圆锥曲线的定义、余弦定理、基本不等式等知识解题.

#### **磨尖训练**

1. [2024·江苏期中]（多选题）已知，分别是椭圆的两个焦点，若椭圆上存在使的面积为的点的个数为4，则实数的值可以是( AD ).

A. 2 B. 3 C. D. 5

[解析]①若,分别是椭圆的上、下两个焦点，由题意及椭圆焦点三角形面积公式得，即，所以，解得.

②若,分别是椭圆的左、右两个焦点，由题意及椭圆焦点三角形面积公式得，即，解得.

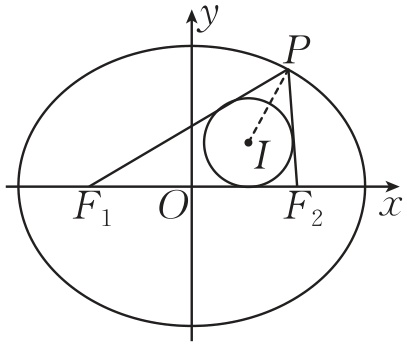
综上，的取值范围为,，由选项可知，，符合题意.故选.

2. 已知双曲线的左、右焦点分别为，，点在双曲线上，且，则的面积为.

[解析]由，得，，由双曲线焦点三角形的面积公式可知.

### **磨尖点二 焦点三角形内切圆问题**

典例2（1） 如图，已知椭圆的左、右焦点分别为,,为椭圆上一点，的内心为，若内切圆半径为1，则.



[解析]由椭圆的标准方程得,,，离心率.不妨设在第一象限，点的坐标为，由椭圆焦点三角形内切圆性质得，,，则，所以，故，即,,，所以.

（2） 已知在双曲线上，其左、右焦点分别为，，若的内切圆切轴于点，则的值为.

[解析]由在双曲线上，可得，

所以，，

由双曲线的焦点三角形内切圆性质得，即，

所以.



在圆锥曲线中，焦点三角形是考查椭圆与双曲线第一定义的良好载体.焦点三角形结合圆，这样的试题难度一定不会小，而且常涉及中位线、角平分线、中垂线、相似等平面几何的知识.

#### **磨尖训练**

1. 已知椭圆的左、右焦点分别为,，为椭圆上不与左、右顶点重合的任意一点，,分别为的内心、重心.当恒与轴垂直时，椭圆的离心率是.

[解析]不妨设在第一象限，点的坐标为，点的坐标为，则由椭圆焦点三角形内切圆的性质得，，又由重心坐标公式得，，当与轴垂直时，，即，故.

2. 已知是双曲线右支上一点，，分别为其左、右焦点，的内切圆与轴相切于点，若为线段为坐标原点的中点，则双曲线的离心率为2.

[解析]设的内切圆圆心为，记的横坐标为，则，

由双曲线焦点三角形内切圆的性质得，，由为线段的中点，得,故.